Clasificación de haces vectoriales

Una introducción a la K-Teoría Topológica

Tomás D. Campo
tomascampo.github.io

SEIFM
seinfismat.github.io

8 de noviembre de 2023

Tabla de contenidos

Tabla de Contenidos

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Un poco de contexto...

Jean Leray (1906-1998)

Figura: Fotografía de J. Leray. Tomada de https://smf.emath.fr/node/27572.

¿Haces para qué?

Es el objeto más sencillo inventado en la Matemática para estudiar de manera rigurosa el paso de lo local a lo global.

Zalamea, 2018.

Alexander Grothendieck (1928-2014)

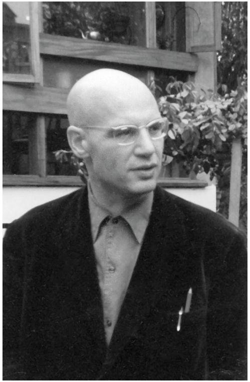


Figura: Fotografía de A. Grothendieck. Tomada de https://www.nature.com/articles/517272a.

¿K-Teoría para qué?

Remítase al título de la charla.

Campo, 2023.

Tabla de Contenidos

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Definición 1

Sean E y X espacios topológicos y $\pi : E \to X$ una función continua. Decimos que la tripla (E, π, X) es una *haz vectorial* sii

1. π es sobreyectiva
2. $\forall x \in X \,|\, \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{K}^n$
3. $\forall \mathcal{U} \subseteq X \exists \varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{K}^n \,|\, \varphi$ es un homeomorfismo

Nota: A E se le llama el *espacio total*, a X el *espacio base*, a π la *proyección de E sobre X* y a $\mathbb{K}^n$ la *fibra estándar* (espacio vectorial finito-dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{K}$).

Observación: $\varphi : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{K}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Ejemplo 1

El *haz trivial* $\pi : X \times \mathbb{K}^n \longrightarrow X$, $(x, v) \longmapsto \pi(x, v) = x$, en el cual $X \times \mathbb{K}^n$ es el espacio total.

Se puede notar que:

1. π es evidentemente sobreyectiva
2. $\pi^{-1}(x) = \{(x, v) \in X \times \mathbb{K}^n\} \simeq \mathbb{K}^n$
3. $\varphi : \pi^{-1}(X) \longrightarrow X \times \mathbb{K}^n$ es la función identidad.

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Ejemplo 2

Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable finito-dimensional. Considerar un par de curvas arbitrarias $\alpha, \beta : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{M}$ que satisfacen, respectivamente, que $\alpha(0) = \beta(0) = x \in \mathcal{M}$.

Def. 2.1

Sea la carta coordenada $(\mathcal{U}, \varphi)$ y $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$. Decimos que dos curvas α y β son equivalentes sii $\frac{d}{d\lambda}(\varphi \circ \alpha)(0) = \frac{d}{d\lambda}(\varphi \circ \beta)(0)$.

Así, se establece la clase de equivalencia $[\alpha]_\sim = \{\beta \,|\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}(\varphi \circ \alpha)(0) = \frac{d}{d\lambda}(\varphi \circ \beta)(0)\}$. Si $\Gamma(\mathcal{M}, x)$ es la colección de todas las curvas que pasan por $x \in \mathcal{M}$, entonces la relación $\sim$ establece el conjunto cociente $\Gamma(\mathcal{M}, x)/\sim$.

Se define la función lineal $\mathcal{D}_x : \Gamma(\mathcal{M}, x)/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$, $[\alpha] \longmapsto \mathcal{D}_x[\alpha] := \frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi \circ \alpha)(\lambda)$.

Observación: $\mathcal{D}_x$ es la *derivada direccional* en x.

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Ejemplo 2

Def 2.2

Decimos que la colección $T_x\mathcal{M} = \{v_x \in L\left(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R}\right) \,|\, v_x = \frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi \circ \alpha)(\lambda)\}$ es un *espacio tangente* al punto $x \in \mathcal{M}$

Def 2.3

La colección de todos los espacios tangentes a $\mathcal{M}$ en x es

$$T\mathcal{M} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} T_x\mathcal{M} = \{(x, v_x) \,|\, x \in \mathcal{M} \wedge v_x \in T_x\mathcal{M}\}$$

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Ejemplo 2

El *haz tangente* $\pi : T\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, $(x, v_x) \longmapsto \pi(x, v_x) = x$, en el cual $T\mathcal{M}$ es el espacio total.

Def 2.4

Decimos que $\mathcal{V} \subseteq T\mathcal{M}$ es abierto sii existe un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $\pi(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$.

Prop 2.1

$$T_x\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Se tiene que que:

1. π es evidentemente sobreyectiva
2. $\pi^{-1}(x) \simeq T_x\mathcal{M}$
3. $\psi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$.

Tabla de Contenidos

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Definición 2

Sean los haces vectoriales $\pi_1 : E_1 \longrightarrow X$ y $\pi_2 : E_2 \longrightarrow X$. Diremos que π_1 y π_2 son isomorfos sii existe $\mathcal{F} : E_1 \longrightarrow E_2$ tal que

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

conmuta.

Observación: Es destacable el hecho de que $\pi_1 = \pi_2 \circ \mathcal{F}$, pues...

Isomorfismos de haces vectoriales

$$\pi_1^{-1}(x) = (\pi_2 \circ \mathcal{F})^{-1}(x)$$
$$= \{\mathcal{F}^{-1}(b) \in E_1 \mid b \in E_2,\ \pi_2(b) = x\}$$
$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \pi_2^{-1})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\pi_2^{-1}(x))$$

En síntesis, es posible notar que

$$\pi_1^{-1}(x) = \mathcal{F}^{-1}(\pi_2^{-1}(x))$$

es decir,

$$\mathcal{F}(\pi_1^{-1}(x)) = \pi_2^{-1}(x) \tag{2}$$

Tabla de Contenidos

Suma directa de haces vectoriales

Definición 3. Pullback

Sea $\pi : E \longrightarrow Y$ un haz vectorial y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si existe un conjunto $f^{\star}(E) = \{(x, a) \in X \times E \,|\, f(x) = \pi(a)\}$, entonces se cumple el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{\star}(E) \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Suma directa de haces vectoriales

Definición 4

Sean $\pi_1 : E_1 \longrightarrow X$ y $\pi_1 : E_1 \longrightarrow X$ haces vectoriales sobre una base X. Si el diagrama de *pullback* se cumple

$$\begin{tikzcd} \Delta^\star(E_1 \times E_2) \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & E_1 \times E_2 \arrow[d, "\pi_1 \times \pi_2"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X \end{tikzcd}$$

entonces, la función $\Delta^\star(E_1 \times E_2) \longrightarrow X$ es denominada como *suma directa sobre* X o *suma de Whitney*. Esta se denota como $\Delta^\star(E_1 \times E_2) = E_1 \oplus E_2$.

Suma directa de haces vectoriales

Definición 5

Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff. Considerar el conjunto de clases de isomorfismos de haces vectoriales complejos sobre X, denotado por $Vect_{\mathbb{C}}(X)$.

Proposición 1

Si $E_1 \simeq E_1'$ y $E_2 \simeq E_2'$, entonces $E_1 \oplus E_2 \simeq E_1' \oplus E_2'$.

Demostración:

La demostración se deja como ejercicio al/la asistente.

QED

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Suma directa de haces vectoriales

Si a $Vect_{\mathbb{C}}(X)$ se le equipa con la operación de *suma directa*, se puede observar que:

1. La suma directa de clases de haces vectoriales es asociativa
2. Existe un elemento neutro para la suma directa de clases haces vectoriales
3. No existe un elemento inverso para la suma directa de clases haces vectoriales
4. La suma directa de clases haces vectoriales es conmutativa

Observación: De esta manera, es posible notar que el par $(Vect_{\mathbb{C}}(X), \oplus)$ satisface la estructura de *monoide abeliano*.

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Tabla de Contenidos

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

El grupo de Grothendieck

Definición 6

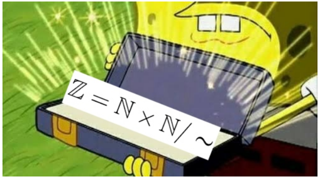
Sea S es un monoide abeliano y L un grupo abeliano con un homomorfismo de grupo $\delta : S \longrightarrow L$. Decimos que L es el *grupo de Grothendieck* de S si para algún grupo abeliano arbitrario G con homomorfismo de monoide $f : S \longrightarrow G$ existe un único homomorfismo de grupo $g : L \longrightarrow G$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, dotted, "g"] \\ & G \end{tikzcd}$$

conmuta.

El grupo de Grothendieck

Para construir un grupo que satisfaga estas características, Grothendieck propuso una técnica eficaz para obtener un grupo a partir de un monoide...



Entonces, de esta manera, se tiene que el grupo de Grothendieck de $Vect_{\mathbb{C}}(X)$ de haces vectoriales sobre X, denotado como $K(X)$, es

$$K(X) = Vect_{\mathbb{C}}(X) \times Vect_{\mathbb{C}}(X) / \sim$$

Al grupo de Grothendick $K(X)$ se le denomina como *grupo de K-Teoría* de X.

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.

Ejemplo

Sea $\{x\}$ un conjunto cuyo único elemento es un punto x.
Se tiene que el monoide $(Vect_{\mathbb{C}}(\{x\}), \oplus)$ se identifica con el monoide $(\mathbb{N}, +)$. Entonces, el grupo de K-Teoría del conjunto $\{x\}$ es

$$K(\{x\}) = (\mathbb{Z}, +)$$

Tabla de Contenidos

Conclusiones

1. Los haces vectoriales son una forma eficaz de caracterizar espacios topológicos compactos de Hausdorff, pues permiten identificar a cada punto con un espacio vectorial y, de esta manera, extender la linealidad desde lo local hasta lo global.
2. Determinar haces vectoriales isomorfos permite *limpiar* la búsqueda de haces vectoriales diferentes que permitan encontrar invariantes matemáticos independientes de la elección de haces.
3. Para un único espacio topológico pueden existir diferentes haces vectoriales, de manera que encontrar invariantes matemáticos entre ellos se vuelve una engorrosa tarea. La K-Teoría permite encontrar estos invariantes mediante un único objeto, el grupo de Grothendieck de tal espacio topológico.

Tabla de Contenidos

Bibliografía

- Arhangel'skii, A.; Tkachenko, M. (2008). Topological Groups and Related Structures. Atlantis Press/World Scientific.
- Borel, A. (1954). Topics in the Homology Theory of Fibre Bundles. Springer-Verlag.
- Ciencias, T. V. [@CienciasTV]. (2018, junio 22). Espacios Vectoriales Topológicos. Mini Curso: Grothendieck... 1/6 (Fernando Zalamea). Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=kOONDWtdBDg&list=PLiD-IJzweXR9ndmvpYnoqBJwAQFE778zv
- Hatcher, A. (2001). Algebraic Topology. Cornell University.
- Husemoller, D. (1994). Fibre Bundles. Springer-Verlag.
- Lubkin, S. (1961). Theory of Covering Spaces. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 104, No. 2 (Aug., 1962), pp. 205-238
- Riehl, E. (2014). Category Theory in Context. Cambridge University Press.

SEMILLERO ESTUDIANTIL de investigación en Física-Matemática.